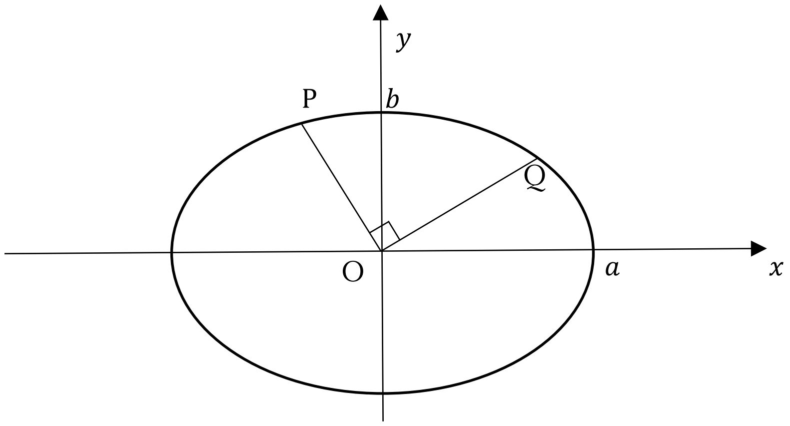
(問題 33)

原点 O を中心とする楕円の 1 つの焦点を F とする。楕円上の点を図のように点 P,Q を線分 OP,OQ が直交するようにとるとき、 $\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}$=(一定) となることを示せ。



(解答)

（解法のテクニック）

P， Qの直交座標を Q$(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$, P$(r_2\cos(\theta+\frac{\pi}{2}), r_2\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))=(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$とおく。 OQ と$x$軸とのなす角を$\theta$とおくと OPと$x$軸とのなす角を$(\theta+\frac{\pi}{2})$と定めることができる。 OP， OQの$x$軸とのなす角を 1 変数$\theta$で表すことができる。

a, bを定数として楕円を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおき、

この式に点 Q の座標を代入して$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow r_1^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$$

同様に P の座標を代入して

$$r_2^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)=1$$

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}$$

$$=\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_1^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{\sin^2\theta}{a^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (\text{一定})$$