(問題 36)

曲線C: $y = x^3 - kx$上の点P$(a, a^3 - ka)$、$a \neq 0$における接線lが，曲線Cと点Pと異なる点Q で交わっている。点Qにおける接線が直線lと直交しているとき，次の問いに答えよ。

(1)点Qの座標をaとkを用いて表せ。

(2) kの取り得る値の範囲を求めよ。

(解答)

(1) $y = x^3 - kx = f(x)$

$y' = 3x^2 - k$

$$\begin{cases} y - f(a) = (3a^2 - k)(x - a) \\ y = x^3 - kx \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$

(解法のテクニック)

$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$，x^2の係数 0 だから 3 次方程式の解と係数の関係より

$a + a + x_1 = 0$ (直線lは接線より$x = a$を重解にもつ。x_1は点Qのx座標)

$x_1 = -2a$

(答え) 点Q$(-2a, -8a^3 + 2ka)$

(2) 点Qにおける接線mの傾きは $12a^2 - k$

直線mと直線lが直交するから $(12a^2 - k)\cdot(3a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15k\,a^2 + k^2 + 1 = 0$$

(解法のテクニック)

aの 4 次と 2 次だけなので$a^2 = t$とおき

$g(t) = 36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0$

$a^2 = t > 0$と条件を付ければ

$t > 0$のtについての 2 次方程式 $36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0$ にすることができる。

この 2 次方程式が正の解をもつ条件は

判別式：$D = 225k^2 - 4\cdot 36(k^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq \frac{4\cdot 4}{9}$

$$k \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq k$$

軸：$\frac{15}{72}k > 0 \Rightarrow \quad k > 0$

$g(0) = k^2 + 1 > 0$(常に成立)

(答え)$\frac{4}{3} \leq k$