

(問題 16)

$\log_{10} 7$ の近似値は 0.8451 である。ある整数 x に対して 7^x が 15 桁の整数となるとき 7^x の 1 の位の数と、 7^x の 10^{14} の位の数字を求めよ。必要であれば $\log_{10} 2 \cong 0.3010$, $\log_{10} 3 \cong 0.4771$ を用いよ。

(解答)

まず x の値を求める。

$$7^2 = 49, 7^3 = \dots 3, 7^4 = \dots 1, 7^5 = \dots 7$$

1 の位の数は $7 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 7$ の繰り返し

7^x が 15 桁の整数であることより

$$14 \leq x \log_{10} 7 < 15$$

$$14 \leq 0.8451x < 15$$

$$\frac{14}{0.8451} \leq x < \frac{15}{0.8451}$$

$$16.3\dots \leq x < 17.5\dots$$

$\therefore x = 17$ ゆえに $7 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 7$ の繰り返しの 17 番目は 7
 7^x の 1 の位の数は 7

(解法のテクニック)

桁数の問題は常用対数が有効

$$\log_{10} 7^{17} = 17 \times 0.8451 = 14.3677$$

ここで $\log_{10} B = 0.3667$ とおくと $B = 10^{0.3667}$

$\log_{10} 2 \cong 0.3010, \log_{10} 3 \cong 0.4771$ より

$$\log_{10} 2 < 0.3667 < \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 2 < 0.3667 \log_{10} 10 < \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 2 < \log_{10} 10^{0.3667} < \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 2 < \log_{10} B < \log_{10} 3$$

$\therefore 2 < B < 3$ $7^{17} = (2 \dots) \times 10^{14}$ ゆえに 7^{17} の 10^{14} の位の数字は 2