(問題１５１)

平面上に，1 辺の長さが 2 のひし形 OACB があり，対角線 AB の長さは$\sqrt{2}$ である。t を正の実数とし，線分 AC,BC をそれぞれ$1:t$ に内分する点を P,Q とする。また直線 AQ と直線 BP の交点を R とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OR}$ を $t,\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 点 A が線分 OR を直径とする円の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(問題１５２)

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & x\end{pmatrix}$ の関して，以下の問いに答えよ。ただし，x は 1 ではない実数，n は自然数とする。

(1) P の逆行列 P^{-1} を，x を用いて表せ。

(2) $B=P^{-1}AP$ を，x を用いて表せ。

(3) B の $(1,2)$ 成分が 0 となる x の値を求め，そのときの B^n を求めよ。

(4) x が(3)の値のとき，A^n を求めよ。

(問題１５３)

a を実数とし，関数 $f(x)=\sin 2x+2a(\sin x-\cos x)+a^3(0^\circ\leq x\leq 180^\circ)$ を考える。

(1) $t=\sin x-\cos x(0^\circ\leq x\leq 180^\circ)$ とおき，$f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ。

また，t の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$g(t)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ。

(3) 関数 $y=m(a)$ のグラフをかけ。

(問題１５４)

円 O ： $x^2+y^2=4$ と点 P$(0,-1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円 O 上を動く点 A に対して，点 P が QA を$1:2$ に内分するような点 Q は 1 つの円周上を動くことを示し，その円の中心と半径を求めよ。

(2) 円 O に内接する△ABC の重心が点 P であるとする。点 A の座標が $(2,0)$ であるとき，直線 BC の方程式を求めよ。

(問題１５５)
空間内に 3 点 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}\right)$を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
(2) (1)における定点 Q は 3 点 A,B,C を通る平面上にあることを示せ。
(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

(問題１５６)
空間の 2 点 P,Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$\overrightarrow{OP}=(2\cos t, 2\sin t, 1), \overrightarrow{OQ}=(-\sin 3t, \cos 3t, -1)$

によって与えられている。ただし，$-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$ とする。
(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。

(問題１５７)

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており，0 と異なる 4 つの実数 p,q,r,s に対して 4 点 P,Q,R,S を $\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OD}$ によって定める。このとき P,Q,R,S が同一平面上にあれば $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成り立つことを示せ。

(問題１５８)

曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+t(-1<t<1)$ の 2 つの交点を A,B とし，点 $(0,1)$ を C とする。三角形 ABC の面積の 2 乗を $S(t)$ とおく。
(1) $S(t)$ を求めよ。
(2) $S(t)$ の増減を調べ，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

(問題１５９)

関数 $F(x)=\int_0^x (at^2+bt+c)dt+d$ が $x=-1$ で極大値 $\dfrac{17}{3}$ をとり，$x=3$ で極小値 -5 をとるとき，定数 a,b,c,d の値を求めよ。また $F(x)$ のグラフをかけ。

(問題１６０)

関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)dt+2\int_1^x f'(t)dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。