(問題 40)

xy平面上の放物線A: $y=x^2$,B: $y=-(x-a)^2+b$は異なる２点Ｐ(x_1,y_1),Ｑ(x_2,y_2),$(x_1>x_2)$で交わるとする。

(1) $x_1-x_2=2$ が成り立つとき、bをaで表せ。

(2) $x_1-x_2=2$ を満たしながら、a, bが変化するとき、直線ＰＱの通過する領域を求め図示せよ。

(解答)

(1)$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-(x-a)^2+b \end{cases}$

$x^2=-(x-a)^2+b$

$2x^2-2ax+a^2-b=0$ このxについての２次方程式の２解がx_1,x_2より $x_1+x_2=a$,

$x_1x_2=\frac{a^2-b}{2}$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b$ $\therefore 4=-a^2+2b$

$$\boldsymbol{b=\frac{1}{2}a^2+2}$$

(2) 直線ＰＱ:$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$

$$y-x_1^2=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

$$y-x_1^2=(x_1+x_2)(x-x_1)$$

$$y=ax-x_1x_2$$

$$=ax-\frac{a^2-b}{2}$$

$$=ax-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+2\right)$$

$$4y=4ax-a^2+4$$

(解法のテクニック)

aについての２次方程式 $a^2-4xa+4y-4=0$ が実数解をもつ条件

判別式：$D/4=(2x)^2-(4y-4)\geq 0$

ゆえに$y\leq x^2+1$

(答え)図の斜線部分（境界線含む。）