(問題１８)

k を定数とする。$A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$に関して

$A^8-A^7-4A^6+4A^5+3A^2-6A$ を計算せよ。

(解答)

(解法のテクニック)

ケーリー・ハミルトンの定理より$A^2-2A+E=0$

(与式)= $(A^2-2A+E)Q+pA+qE$ の形に持ち込むと、$A^2-2A+E=0$ より

(与式)= $pA+qE$ となる。　行列の多項式は

行列 A を整式の x に単位行列 E を整式の定数 1 とおいて x の多項式における。

$$
\begin{array}{r}
x^6+x^5-3x^4-3x^3-3x^2-3x \\
x^2-2x+1\,\big)\,x^8-x^7-4x^6+4x^5+3x^2-6x \\
x^8-2x^7+x^6 \\ \hline
x^7-5x^6+4x^5 \\
x^7-2x^6+x^5 \\ \hline
-3x^6+3x^5 \\
-3x^6+6x^5-3x^4 \\ \hline
-3x^5+3x^4 \\
-3x^5+6x^4-3x^3 \\ \hline
-3x^4+3x^3+3x^2 \\
-3x^4+6x^3-3x^2 \\ \hline
-3x^3+6x^2-6x \\
-3x^3+6x^2-3x \\ \hline
-3x
\end{array}
$$

上記の割り算より

$A^8-A^7-4A^6+4A^5+3A^2-6A=(A^2-2A+E)Q-3A+0E$

$$=-3A+0E=-3\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3k\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$