(問題１９９)

$f(x)=e^{-x}\cos x$ とする。

(1) $e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

(3) 自然数 $n$ に対して

$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$

とおく。次の式が成り立つことを示せ。

$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<S_n+\frac{1}{n}$

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(解答)

(1)

$(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)'$

$=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$

$=2e^{-x}\cos x$

$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$f''(x)=e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$

$=2e^{-x}\sin x\geq 0(0\leq x\leq \frac{\pi}{2})$

$0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$ において

$e^{-x}\cos x$ は単調減少

$f''(x)\geq 0$ より $y=f(x)$ は下に凸

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\sin x)' dx$$

$$= \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x}\sin x dx$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(-\cos x)' dx$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}} + \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-x}(-\cos x) dx$$

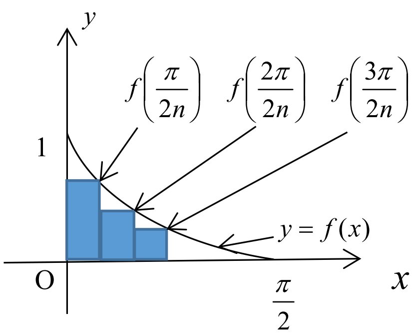
$$= e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx$$

$$\therefore 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$$

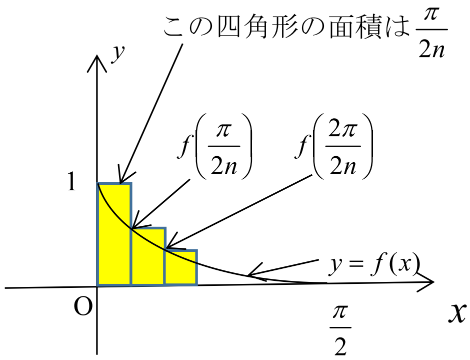
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$$

(3)

$$\frac{\pi}{2}S_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$




$\frac{\pi}{2}S_n$




$\frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}\right)$

図より

$$\frac{\pi}{2}S_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore S_n < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \left(S_n + \frac{1}{n}\right)$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{e^{-\pi}+1}{\pi}$$